EXERCICE N°1 : 35' 6 points

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan x$.

1°) a) Montrer que f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,1]$ et calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,1]$, et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

c) En déduire que pour tout $x\in[0,1]$: $f^{-1}(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

2°) On considère la suite (I_n) définie sur $IN^*\setminus\{1\}$ par $I_n=\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^{2n}}dt$.

a) On pose $\varphi_n(t)=f^{-1}(t^n)$ avec $t\in[0,1]$. Prouver que φ_n est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $\varphi_n'(t)$.

b) En déduire I_n en fonction de n.

3°) Soit la suite (J_n) définie sur IN^* par $J_n=\int_0^1 \frac{t^{3n-1}}{\left(1+t^{2n}\right)^2}dt$.

a) À l'aide d'une intégration par parties montrer que $J_n=-\frac{1}{4n}+\frac{1}{2}I_n$ puis en déduire J_n en fonction de n.

b) Utiliser les résultats des questions précédentes pour calculer l'intégrale $A=\int_0^1 \frac{t+2t^5}{\left(1+t^4\right)^2}dt$.

EXERCICE N°2 : 35' 6 points

n est un entier naturel superieur ou égal à 2.

Soit f_n la fonction défibie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f_n(x)=\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}$.

On désigne par (C_n) la courbe representative de f_n dans un repere othonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Etudier les variation de f_n.

b) Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symetrie de (C_n).

c) Tracer la courbe (C_2).

2°) On considère la suite (I_n) définie sur $IN^*\setminus\{1\}$ par $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt$.

Donner une interprétation graphique de U_2. Calculer U_2.

3°) Soient les suites (V_n) et (W_n) définie par $V_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_n(x)dx$ et $W_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$.

a) Montrer que pour tout $x\in IR_+$, $\frac{1}{x+1}\geq 1-x$ et que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\tan x\leq\frac{4}{\pi}x$.

b) En déduire que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $1-\left(\frac{4}{\pi}x\right)^n\leq f_n(x)\leq 1$.

c) Montrer que la suite (V_n) converge vers un réel $\mathscr{L}$ que l'on précisera. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

EXERCICE N°3 :	**35'**	**6 points**	

Soit f la fonction définie par $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

On désigne par (C_f) la courbe representative de f dans un repere othonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Justifier que f est définie et croissante sur IR.

2°) Montrer que (C_f) passe par O et donner l'équation de la tangente à (C_f) en O.

3°) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=f(\tan x)=\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}$.

Démontrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $g'(x)$.

4°) Déterminer $f(1)$ et $f\left(\sqrt{3}\right)$.

5°) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on pose $h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que h est constante et déterminer cette constante.

6°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

7°) Démontrer que f est une fonction impaire et tracer la courbe (C_f).